Abstand d zwischen windschiefen Geraden

$g:\ \vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{u};\qquad A(a_1|a_2|a_3)\in g$

$h:\ \vec{x}=\vec{b}+\mu\cdot\vec{v};\qquad B(b_1|b_2|b_3)\in h$

mit λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definition von „windschief”

Zwei Geraden sind windschief zueinander, wenn sie

1. nicht parallel sind und sich
2. nicht schneiden.

... oder: Zwei Geraden sind windschief zueinander, wenn ein Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und die Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ ein Volumen aufspannen, also

$$V=\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=\det\begin{pmatrix} b_1-a_1 & u_1 & v_1\\ b_2-a_2 & u_2 & v_2\\ b_3-a_3 & u_3 & v_3\end{pmatrix}\neq 0$$

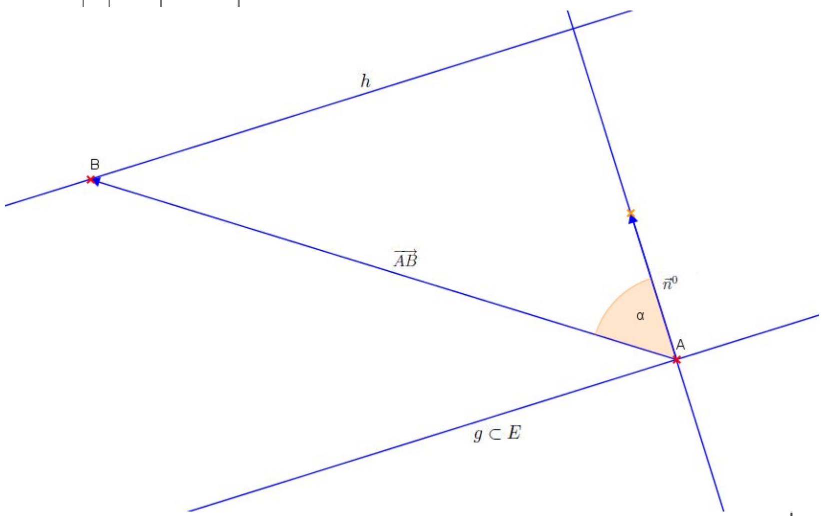
Das GEMEINLOT steht auf beiden Geraden senkrecht und kennzeichnet den (kürzesten) Abstand.

Herleitung der Formel

Eine Hilfsebene muss die eine Gerade enthalten und zur anderen Geraden parallel sein.

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}\qquad\Rightarrow \vec{n}\circ\vec{u}=\vec{n}\circ\vec{v}=0$$

$$\vec{n}^0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\qquad\Rightarrow\left|\vec{n}^0\right|=1$$



$$\cos\alpha=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}=\frac{d}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\Rightarrow d=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{n}^0\circ\overrightarrow{AB}=\left|\vec{n}^0\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$d=\frac{\left|(\vec{b}-\vec{a})\circ(\vec{u}\times\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\det(\vec{b}-\vec{a},\,\vec{u},\,\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} b_1-a_1 & u_1 & v_1\\ b_2-a_2 & u_2 & v_2\\ b_3-a_3 & u_3 & v_3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}^2}}$$

Weitere Verwendung der Formel

- Abstand zwischen zwei zueinander windschiefen Geraden g und h
- Abstand zwischen Ebene E und Punkt B
- Abstand zwischen Ebene E und paralleler Gerade g (g // E)
- Abstand zwischen Ebene E_1 und paralleler Ebene E_2 (E_1 // E_2)

Allgemeine Form

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\circ\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$