

Abstand d zwischen windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}; \quad A(a_1|a_2|a_3) \in g$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}; \quad B(b_1|b_2|b_3) \in h$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Definition von „windschief“

Zwei Geraden sind windschief zueinander, wenn sie

1. nicht parallel sind und sich
2. nicht schneiden.

... oder: Zwei Geraden sind windschief zueinander, wenn ein Verbindungsvektor \vec{AB} und die Richtungsvektoren \vec{u}, \vec{v} ein Volumen aufspannen, also

$$V = \det(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

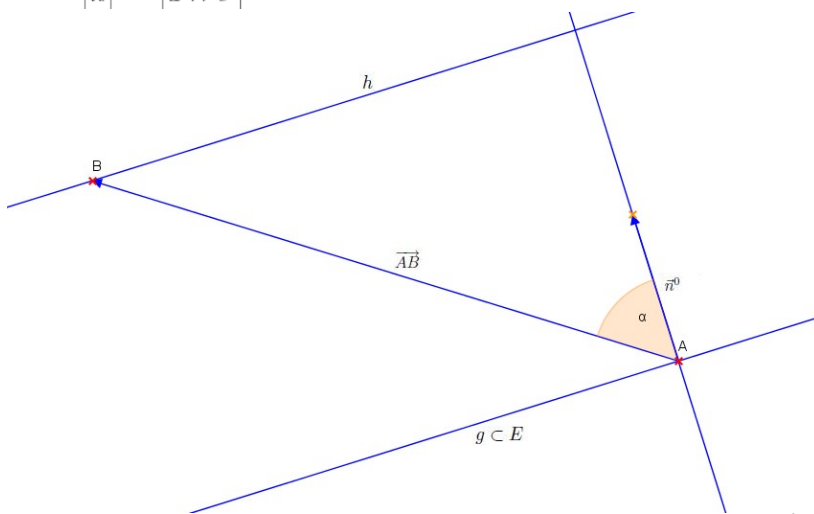
Das GEMEINLOT steht auf beiden Geraden senkrecht und kennzeichnet den (kürzesten) Abstand.

Herleitung der Formel

Eine Hilfsebene muss die eine Gerade enthalten und zur anderen Geraden parallel sein.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \vec{n} \circ \vec{u} = \vec{n} \circ \vec{v} = 0$$

$$\vec{n}^D = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \quad \Rightarrow |\vec{n}^D| = 1$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{|\vec{AB}|}$$

$$\Rightarrow d = |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{n}^D \circ \vec{AB} = |\vec{n}^D| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha = |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha$$

$$d = \frac{|(\vec{b} - \vec{a}) \circ (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2}}$$

Weitere Verwendung der Formel

- Abstand zwischen zwei zueinander windschiefen Geraden g und h
- Abstand zwischen Ebene E und Punkt B
- Abstand zwischen Ebene E und paralleler Gerade g ($g \parallel E$)
- Abstand zwischen Ebene E_1 und paralleler Ebene E_2 ($E_1 \parallel E_2$)

Allgemeine Form

$$d = \frac{|\vec{AB} \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$