Fachreferat aus dem Fach Mathematik

Abstand zweier zueinander windschiefen Geraden

Jakob Schöttl

2009-02-17

Inhaltsverzeichnis

1 Deklaration

Gegeben sind die Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$
$$h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

und $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Außerdem die Punkte

$A(a_1|\,a_2|\,a_3) \in g$ und

$B(b_1|\,b_2|\,b_3) \in h$.

2 Definition von „windschief"

Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind zueinander windschief, wenn sie sich *nicht schneiden* und zueinander *nicht parallel* sind. Das bedeutet, dass die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, sowie ein beliebiger Verbindungsvektor[1] z.B. $\overrightarrow{AB}$ linear unabhängig sein müssen. Zwei Beispiele:

- Wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig wären, würde das bedeuten, dass sie in die gleiche oder gegengleiche Richtung zeigen, das heißt die Geraden sind parallel oder identisch.
- Wenn der Richtungsvektor $\vec{u}$ und der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ linear abhängig wären, würde das bedeuten, dass der Punkt $B \in h$ gleichzeitig auf g liegt, dass sich also g und h schneiden (oder sogar identisch sind).

Um festzustellen, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind, kann man prüfen, ob sie ein Spatvolumen (Parallelflach) aufspannen (Formelsammlung S. 81/F.3.). Wenn alle drei Vektoren in einer Ebene oder sogar in einer Geraden liegen, können sie kein Volumen aufspannen. Dies lässt sich mit der Determinante prüfen:

$$V = \det\left(\overrightarrow{AB},\, \vec{u},\, \vec{v}\right) = \det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

Für $V \neq 0$ sind die Geraden also windschief zueinander!
In diesem Fachreferat geht es darum, den kürzesten Abstand zwischen den zueinander windschiefen Geraden zu berechnen. Das sogenannte Gemeinlot steht auf beiden Geraden senkrecht und verbindet sie. Es kennzeichnet den Abstand der Geraden.

3 Meine eigenen Versuche

Meine ersten eigenen Versuche waren zu analytisch; Wenn man sich die Geraden im Raum vorstellt und versucht dadurch auf eine *geometrische* Lösung zu kommen, entsteht eine einzige Formel und nicht wie hier ganze Algorithmen.

3.1 Kleinster Abstand

Der Abstand d_0 ist der kleinste Wert aller Abstände d (Minimum).

$$\vec{d} = \vec{x}_g - \vec{x}_h = (\vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}) - (\vec{b} + \mu \cdot \vec{v}) = \vec{a} - \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{v}$$

$$d = \left|\vec{d}\right| = \sqrt{(a_1 - b_1 + \lambda \cdot u_1 - \mu \cdot v_1)^2 + (a_2 - b_2 + \lambda \cdot u_2 - \mu \cdot v_2)^2 + (a_3 - b_3 + \lambda \cdot u_3 - \mu \cdot v_3)^2}$$

Um d_0 zu ermitteln muss die Abstandsfunktion $d(\lambda, \mu)$ nach λ und μ partiell abgeleitet werden und die Ableitungen gleich null gesetzt werden. Anschließend löst man die Gleichungen nach λ und μ auf; das sind immer noch die Parameter für die Gleichungen der Geraden g und h. Sie können in die Geradengleichungen eingesetzt werden um die beiden Punkte mit dem geringsten Abstand zu ermitteln und auch in die Gleichung für d um den Abstand selbst zu ermitteln.

3.2 Vektor der auf beiden Geraden senkrecht steht *und* sie verbindet

Der (kleinste) Abstand der zwei Geraden lässt sich auch als der Abstand definieren, indem der Verbindungsvektor $\vec{d}$ gleichzeitig senkrecht auf beiden geraden steht.

$$\vec{d} \circ \vec{u} = 0 \wedge \vec{d} \circ \vec{v} = 0$$

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 = 0 \wedge d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 = 0$$

Das führt auf ein unterbestimmtes Gleichungssystem, also wähle ich $d_3 = \nu$. Dadurch ergibt sich:

[1] Verbindungsvektor nenne ich einen Vektor, der zwei beliebige Punkte der beiden Geraden miteinander verbindet.

$$\begin{matrix} d_1 = -\frac{\nu \cdot u_3 v_2 - \nu \cdot u_2 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ d_2 = -\frac{\nu \cdot u_3 v_1 - \nu \cdot u_1 v_3}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \\ d_3 = \nu \end{matrix} \quad \text{, also der Vektor } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu \cdot u_3 v_2 - \nu \cdot u_2 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ -\frac{\nu \cdot u_3 v_1 - \nu \cdot u_1 v_3}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \\ \nu \end{pmatrix}$$

Da $\vec{d}$ der Verbindungsvektor sein soll, muss folgende Gleichung erfüllt sein (wie bei 3.1):

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{v}$$

Der Vektor $\vec{d}$ ist bis auf einen Parameter gegeben ist, können wir ihn hier einsetzen, was zu einem lösbaren Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen führt:

$$\begin{matrix} a_1 - b_1 + \lambda \cdot u_1 - \mu \cdot v_1 = -\frac{\nu \cdot u_3 v_2 - \nu \cdot u_2 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ a_2 - b_2 + \lambda \cdot u_2 - \mu \cdot v_2 = -\frac{\nu \cdot u_3 v_1 - \nu \cdot u_1 v_3}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \\ a_3 - b_3 + \lambda \cdot u_3 - \mu \cdot v_3 = \nu \end{matrix}$$

Wenn das Gleichungssystem gelöst ist, hat man wieder die Parameter λ und μ für Gleichungen der Geraden und ν für $\vec{d}$. Der Betrag $\left|\vec{d}\right|$ entspricht dem Abstand der Geraden.

4 Herleitung und Erklärung der Formel

Der Lösungsansatz ist, dass man eine Hilfsebene durch eine der Geraden legt, die parallel zur anderen Geraden ist. Und schon sind wir bei einer bekannten Aufgabenstellung: Abstand zwischen Gerade und Ebene.Hier kommt man aber sogar auf eine einzige Formel.

4.1 Hesse'sche Normalform

Man könnte die Formel auch mit Hilfe der Hesse'schen Normalform herleiten, aber da diese sowieso nicht im Lehrplan ist erkläre ich es lieber auf die andere Art.

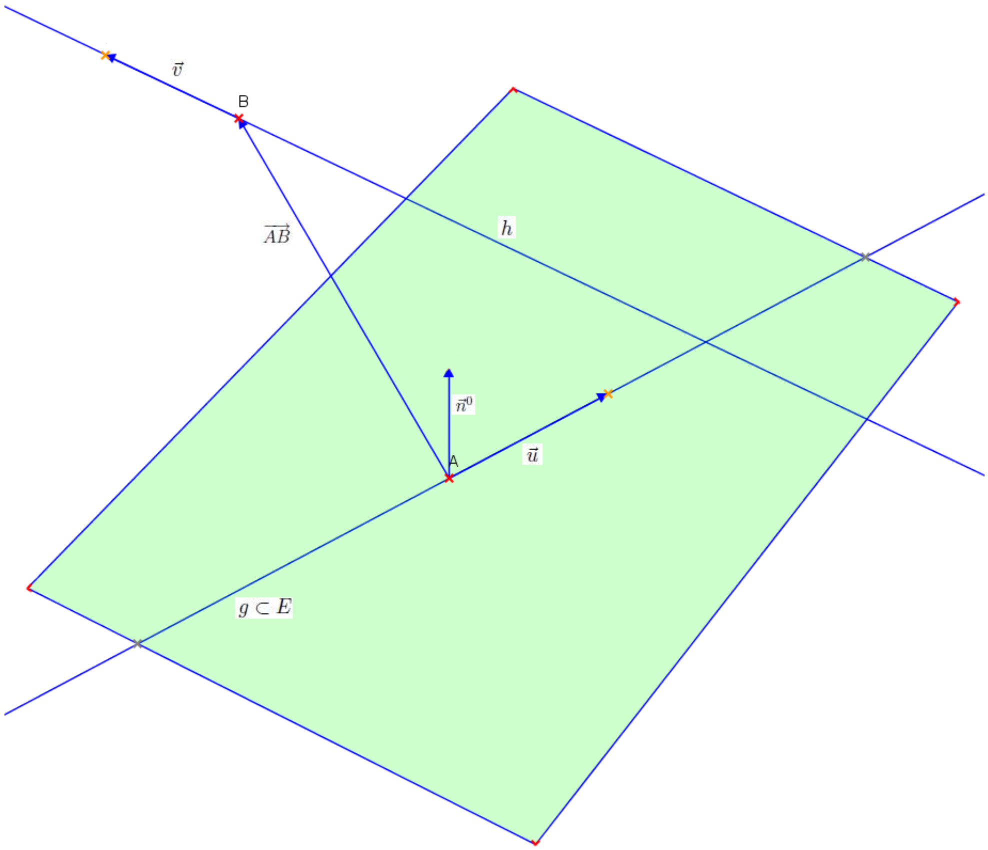
4.2 Verbindungsvektor wird auf Normalvektor projiziert

Wichtig ist zunächst die Richtung des Gemeinlots. Diese lässt sich als Vektor einfach bestimmen, indem man die Richtungsvektoren der beiden Geraden vektoriell miteinander multipliziert:

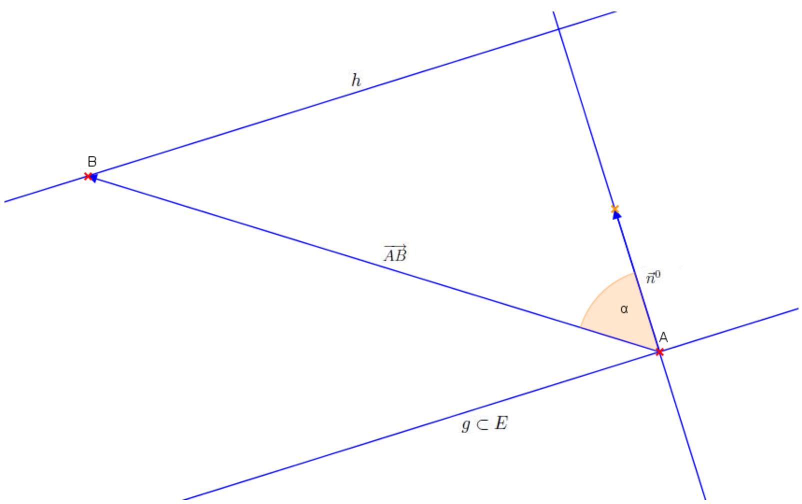
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \qquad \Rightarrow \vec{n} \circ \vec{u} = \vec{n} \circ \vec{v} = 0$$

Später wird man sehen, dass wir hier aber den Einheitsvektor, also einen Vektor mit der Länge 1 brauchen (Formelsammlung S. 79/C.3.):

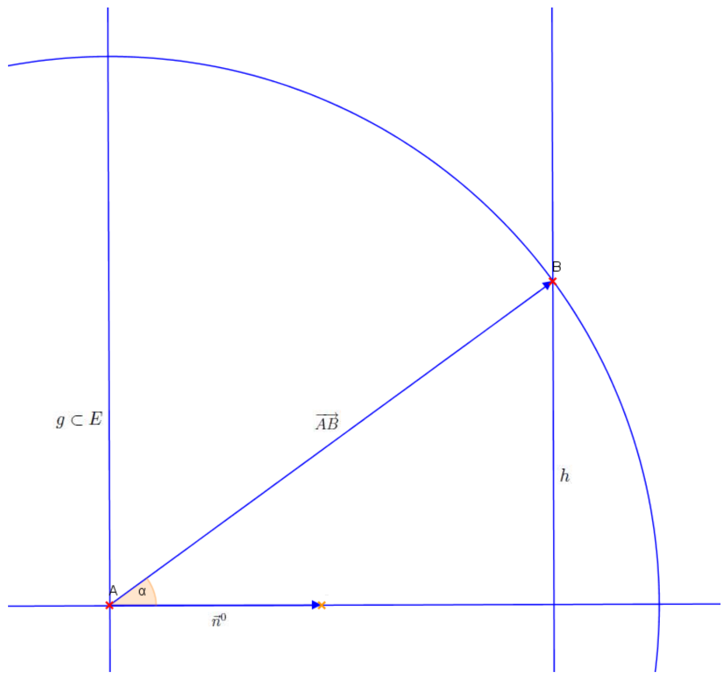
$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}\,|} \qquad \Rightarrow \left|\vec{n}^0\right| = 1$$



$\vec{v}$
B
$\overrightarrow{AB}$
h
$\vec{n}^0$
A
$\vec{u}$
$g \subset E$



h
B
$\overrightarrow{AB}$
$\vec{n}^0$
α
A
$g \subset E$



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\Rightarrow\; d = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ist ein beliebiger Verbindungsvektor zwischen den Geraden. Das Skalarprodukt lässt sich umschreiben (Skalarprodukt, Formelsammlung S. 79/B.1.):

$$\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{AB} = \left|\vec{n}^0\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$$

weil $\vec{n}^0$ ein Einheitsvektor mit der Länge 1 ist.

$\overrightarrow{AB} \circ \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}\,|} = \frac{\overrightarrow{AB}\circ(\vec{u}\times\vec{v})}{|\vec{u}\times\vec{v}\,|}$, wegen Assoziativgesetz (siehe Formelsammlung S. 79/B.2.).

Die fast fertige Formel in Vektor-Form lautet dann $d = \frac{\left|(\vec{b}-\vec{a})\circ(\vec{u}\times\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}\,|}$; Die Betragsstriche sind hinzugekommen, weil ein Abstand logischerweise positiv ist. Der Zähler kann auch als Determinante geschrieben werden (siehe Formelsammlung S. 81/F.3.):

$$d = \frac{\left|\det(\vec{b}-\vec{a},\,\vec{u},\,\vec{v})\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}\,|} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} b_1-a_1 & u_1 & v_1 \\ b_2-a_2 & u_2 & v_2 \\ b_3-a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2}}$$

Die Determinante ist übrigens die gleiche wie bei 2, wo wir sie benutzt haben, um festzustellen ob die Geraden windschief zueinander sind, deshalb nicht zweimal ausrechnen!

5 Beispiel

Gegeben sind folgende Geradengleichungen:

$$g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

windschief?

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 4-1 \\ -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$V = \det\left(\overrightarrow{AB},\, \vec{u},\, \vec{v}\right) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 0-1-12-0+4-9 = -18 \neq 0$ $\Rightarrow$ Geraden g und h sind windschief zueinander!

in Formel einsetzen...

Für die Determinante wird $V = -18$ eingesetzt:

$$d = \frac{\left|\det(\vec{b}-\vec{a},\, \vec{u},\, \vec{v})\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|-18|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{2^2+7^2+1^2}} = \frac{18}{\sqrt{54}} = \frac{18}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Der Abstand der Geraden beträgt also $\sqrt{6}$ Längeneinheiten.

6 Weitere Verwendungsmöglichkeiten der Formel

Die Formel für den Abstand d lässt sich für insgesamt vier - uns bekannten - Abstandsberechnungen einsetzen:

1. Abstand zwischen zwei zueinander *windschiefen Geraden* g und h
2. Abstand zwischen *Ebene* E und *Punkt* B
3. Abstand zwischen *Ebene* E und *paralleler Gerade* g ($g \parallel E$)
4. Abstand zwischen *Ebene* E_1 und *paralleler Ebene* E_2 ($E_1 \parallel E_2$)

Dazu kann die allgemeine Form der Formel verwendet werden:

$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \circ \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$ mit

$\vec{n}$: Normalvektor auf Ebene

$\overrightarrow{AB}$: Verbindungsvektor zwischen den zwei geometrischen Elementen

7 Quellen

- Wikipedia: Windschiefe Geraden
- www.rither.de: Abstand zwischen Geraden
- www.mathe.tu-freiberg.de: Abstand windschiefer Geraden
- Formelsammlung „Mathematische Formeln und Definitionen"